第27卷 第5期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 5
2010年10月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0781-08

右删失数据下 Pareto 分布参数的经验 Bayes 渐近性质*

黄　娟

(广东海洋大学理学院，湛江　524088)

摘　要: 本文借助经验 Bayes 方法研究了 Pareto 分布参数的双边检验，由于此方法无需对先验分布强加限制，因而非常稳健。在随机右删失的情形下，为了估计未知的边缘密度函数及其导数，首先引入核估计方法，从而，进一步构造了参数的经验 Bayes 检验函数，并获得了所提出的检验函数的渐近最优性及其收敛速度。

关键词: 右删失数据；经验 Bayes；渐近最优性；收敛速度

分类号: **AMS**(2000) 62C12　　**中图分类号**: O212.1　　**文献标识码**: A

1　引言

从 1964 年，Robbins[1] 最早提出了经验 Bayes 方法，随后一些学者，把它运用各种分布。经验 Bayes (EB) 估计和检验已被众多统计学者作了深入的研究[2-4]，但是，上述方法基本上都是在完全数据情形下考虑的。然而在实际生活中所遇到的样本多具有不完全性，如：在可靠性寿命试验，医药追踪试验及其生存分析等领域的研究中，产生了大量的不完全数据，其中有相当一部分数据为删失数据。本文在右删失数据下讨论 Pareto 分布参数的经验 Bayes 检验。考虑如下 Pareto 分布[5]，设随机变量 X 的条件概率密度为

$$f(x\,|\,\theta)=\frac{\theta\alpha^{\theta}}{x^{\theta+1}},\tag{1}$$

其中 θ 为参数，且 α 已知常数。样本空间为 $\Omega=\{x\,|\,x>\alpha\}$，参数空间为 $\Theta=\{\theta\,|\,\theta>0\}$。

检验如下的问题

$$H_0:\theta_1\le\theta\le\theta_2 \Longleftrightarrow H_1:\theta<\theta_1,\quad \text{或}\quad \theta>\theta_2,\tag{2}$$

此处 θ_1 和 θ_2 为给定的正常数，若取

$$\theta_0=\frac{\theta_1+\theta_2}{2},\quad \gamma_0=\frac{\theta_2-\theta_1}{2},$$

则检验问题 (2) 可转化为

$$H_0^*:|\theta-\theta_0|\le\gamma_0 \Longleftrightarrow H_1^*:|\theta-\theta_0|>\gamma_0.\tag{3}$$

对假设检验 (3)，令损失函数为

$$\begin{aligned}L_i(\theta,d_i)\ =\ &(1-i)a\left[(\theta-\theta_0)^2-\gamma_0^2\right]I_{[|\theta-\theta_0|>\gamma_0]}\\&+ia\left[\gamma_0^2-(\theta-\theta_0)^2\right]I_{[|\theta-\theta_0|\le\gamma_0]},\quad i=0,1,\end{aligned}$$

收稿日期: 2008-10-28.　**作者简介**: 黄娟 (1978年11月生)，女，讲师. 研究方向：概率统计.
***基金项目**: 广东海洋大学科研资助项目 (1012138; 0612163).

此时，a 为大于零的常数，$d=\{d_0,d_1\}$ 是行动空间，d_0 表示接受 H_0^*，d_1 表示拒绝 H_0^*。

假设参数 θ 有未知的先验分布 $G(\theta)$。令随机化判决函数为

$$\delta(x)=P\big(\text{接受 } H_0^*\,|\,X=x\big), \tag{4}$$

则 $\delta(x)$ 的风险函数为

$$\begin{aligned} R\big(\delta(x),G(\theta)\big) &= \int_\Theta\int_\Omega \big[\,L_0(\theta,d_0)f(x\,|\,\theta)\delta(x)+L_1(\theta,d_1)f(x\,|\,\theta)(1-\delta(x))\,\big]\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta) \\ &= a\int_\Omega \beta(x)\delta(x)\mathrm{d}x+C_G, \end{aligned} \tag{5}$$

此处

$$C_G=\int_\Theta L_1(\theta,d_1)\mathrm{d}G(\theta), \quad \beta(x)=\int_\Theta \big[\,(\theta-\theta_0)^2-\gamma_0^2\,\big]f(x\,|\,\theta)\mathrm{d}G(\theta). \tag{6}$$

随机变量 X 的边缘分布为

$$f(x)=\int_\Theta f(x\,|\,\theta)\mathrm{d}G(\theta)=\int_\Theta \theta\alpha^\theta x^{-(\theta+1)}\mathrm{d}G(\theta). \tag{7}$$

由 (6) 式经计算可得

$$\beta(x)=W(x)f^{(2)}(x)+U(x)f^{(1)}(x)+Lf(x), \tag{8}$$

其中

$$W(x)=x^2, \quad U(x)=(2\theta_0+3)x, \quad L=(\theta_0+1)^2-\gamma_0^2,$$

$f^{(1)}(x)$ 和 $f^{(2)}(x)$ 分别表示 $f(x)$ 的一、二阶导数。

由 (5) 可知，Bayes 检验函数为

$$\delta_G(x)=\begin{cases} 1, & \beta(x)\le 0, \\ 0, & \beta(x)>0, \end{cases} \tag{9}$$

其 Bayes 风险为

$$R(G)=\inf_\delta R(\delta,G)=R(\delta_G,G)=a\int_\Omega \beta(x)\delta_G(x)\mathrm{d}x+C_G. \tag{10}$$

注意到当先验分布 $G(\theta)$ 已知且 $\delta(x)=\delta_G(x)$，上述风险是可求的。然而 $G(\theta)$ 经常是未知，从而 $\delta_G(x)$ 不可用，因此引入 EB 方法。

2 EB 检验函数的构造

本节在下列框架下构造 EB 检验函数：设 $(X_1,\theta_1),(X_2,\theta_2),\cdots,(X_n,\theta_n)$ 为独立同分布随机变量序列，其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，X 有共同的边缘概率密度函数 $f(x)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为历史样本，X 为当前样本。$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$，$\theta$ 是不可观测的且有有未知的先验分布 $G(\theta)$。由于某种原因，历史样本 $\{X_i\,|\,1\le i\le n\}$ 常常因随机右删失而不能被完全观察到，我们仅能观察到 $\{(Z_i,\delta_i)\,|\,1\le i\le n\}$，其中

$$Z_i=\min_{1\le i\le n}(X_i,Y_i), \quad \delta_i=I\,(X_i\le Y_i), \quad i=1,2,\cdots,n,$$

且 $\{Y_i\,|\,1 \le i \le n\}$ 为独立同分布。但可以不要求 $\{X_i\,|\,1 \le i \le n\}$ 与 $\{Y_i\,|\,1 \le i \le n\}$ 之间相互独立。设 X 的未知边缘分布函数为 $F(x)$，其未知边缘密度函数和 r 阶导数分别为 $f(x)$ 及 $f^{(r)}(x)\,(r=0,1,2)$。于是利用样本

$$(Z_1,\delta_1),\,(Z_2,\delta_2),\,\cdots,\,(Z_n,\delta_n)$$

来估计 $f(x)$ 及 $f^{(r)}(x)$。

对 Kaplan-Meimer 估计量作些修正

$$1-\widehat{F}(x)=\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{\overline{H}_n(Z_i)}{\overline{H}_n(Z_i)+\frac{1}{n}}\Big)^{\delta_i(x)},$$

其中 $H(x)=P(Z_i\le x)$，$H_n(x)$ 是 $H(x)$ 的经验分布函数，且

$$\overline{H}_n=1-H_n,\quad \delta_i(x)=\delta_i I\,(Z_i\le x).$$

进一步假设

$$\lim_{x\to\tau_F}\inf P\big(Y_1\ge X_1\,|\,X_1\big)=d>0,$$

其中 $\tau_F=\inf\{t:F(t)=1\}$。并假定 $f(x)\in C_{s,\alpha}$，$x\in R^1$，其中 $C_{s,\alpha}$ 表示 $\mathbf{R}^1$ 中的一族概率密度函数，其 s 阶导数存在，连续且绝对值不超过 α, $s\ge 3$ 为正整数。首先构造 $\beta(x)$ 的估计量。

令 $K_r(x)\,(r=0,1,2)$ 是有界 Borel 可测的函数，在区间 $(0,1)$ 之外为零且满足如下条件

$$(A1)\quad \frac{1}{t!}\int_0^1 u^tK_r(u)\mathrm{d}u=\begin{cases}1, & t=r,\\ 0, & t\ne r,\quad t=0,1,\cdots,s-1,\end{cases}$$

$$(A2)\quad \int_0^1 |K_r'(u)|\,\mathrm{d}u\le c<\infty,$$

其中 $K_r'(u)$ 为 $K_r(u)$ 的一阶导数。

记 $f^{(0)}(x)=f(x)$，$f^{(r)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 r 阶导数，对 $r=0,1,2$。定义 $f^{(r)}(x)$ 的核估计为

$$f_n^{(r)}(x)=\frac{1}{b_n^{1+r}}\int K_r\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}\widehat{F}(t), \tag{11}$$

其中 $\{b_n\}$ 为正数序列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。

所以 $\beta(x)$ 的估计量为

$$\beta_n(x)=W(x)f_n^{(2)}(x)+U(x)f_n^{(1)}(x)+Lf_n(x), \tag{12}$$

故 EB 检验函数定义为

$$\delta_n(x)=\begin{cases}1, & \beta_n(x)\le 0,\\ 0, & \beta_n(x)>0.\end{cases} \tag{13}$$

在本文中，令 E_n 表示对随机变量 $\{(Z_i,\delta_i)\,|\,1\le i\le n\}$ 的联合分布求均值，则 $\delta_n(x)$ 的全面风险为

$$R\big(\delta_n(x),G\big)=a\int_\Omega \beta(x)E_n\big[\delta_n(x)\big]\mathrm{d}x+C_G. \tag{14}$$

若

$$\lim_{n\to\infty}R(\delta_n,G)=R(\delta_G,G),$$

称 $\{\delta_n(x)\}$ 为渐近最优的EB检验函数；若 $R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)=O(n^{-q})$，$q>0$，则称EB检验函数 $\{\delta_n(x)\}$ 的收敛速度为 $O(n^{-q})$。为导出 $\{\delta_n(x)\}$ 的渐近最优性和收敛速度，首先证明以下引理。

3 引理

本文中令 $c,c_1,c_2,c_3,\cdots,c_6$ 表示不同的常数，即使在同一表达式中它们也可取不同的值。

引理3.1 设 $f_n^{(r)}(x)$ 由(11)式定义，假定条件 $(A1)$-$(A2)$ 成立，且

$$\lim_{x\to\tau_F}\inf P\big(Y_1\geq X_1\,|\,X_1\big)=d>0,\quad \forall\, x\in\Omega.$$

(I) 当 $f^{(s)}(x)$ 关于 x 连续，当

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0\quad 且\quad \lim_{n\to\infty}n^{-1}b_n^{-2r-2}\log\log n=0$$

时，则有

$$\lim_{n\to\infty}E\left|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\right|^2=0.$$

(II) 当 $f(x)\in C_{s,a}$，取 $b_n=n^{-\frac{1}{2s+3}}$ 时，对于 $0<\lambda\leq 1$，有

$$E\left|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\right|^{2\lambda}\leq c\cdot n^{-\frac{2\lambda(s-r)}{2s+3}}.$$

(I) **的证明** 由分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\big[f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\big]^2\\
=&\ \Big\{\frac{1}{b_n^{1+r}}\int K_r\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}\widehat{F}(t)-\frac{1}{b_n^{1+r}}\int K_r\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}F(t)\\
&+\frac{1}{b_n^{1+r}}\int K_r\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}F(t)-f^{(r)}(x)\Big\}^2\\
\leq&\ 2\Big\{\frac{1}{b_n^{1+r}}\int K_r\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}\widehat{F}(t)-\frac{1}{b_n^{1+r}}\int K_r\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}F(t)\Big\}^2\\
&+2\Big\{\frac{1}{b_n^{1+r}}\int K_r\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}F(t)-f^{(r)}(x)\Big\}^2\\
=&\ 2\Big\{\frac{1}{b_n^{1+r}}\int K_r\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}\big[\widehat{F}(t)-F(t)\big]\Big\}^2+2\Big\{\frac{1}{b_n^{1+r}}\int K_r\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}F(t)-f^{(r)}(x)\Big\}^2\\
\leq&\ 2\Big\{\frac{1}{b_n^{2+r}}\int\big|\widehat{F}(t)-F(t)\big|K_r'\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}t\Big\}^2+2\Big\{\frac{1}{b_n^{1+r}}\int K_r\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}F(t)-f^{(r)}(x)\Big\}^2\\
\leq&\ 2\Big\{\frac{1}{b_n^{2+r}}\int\big[\widehat{F}(t)-F(t)\big]K_r'\Big(\frac{x-t}{b_n}\Big)\mathrm{d}t\Big\}^2+2\Big\{\frac{1}{b_n^{r}}\int K_r(u)f(x-ub_n)\mathrm{d}u-f^{(r)}(x)\Big\}^2\\
\leq&\ 2\Big\{\frac{1}{b_n^{1+r}}\sup_t\big|\widehat{F}(t)-F(t)\big|\int_0^1\big|K_r'(u)\big|\mathrm{d}u\Big\}^2+2\Big\{\frac{1}{b_n^{r}}\int K_r(u)f(x-ub_n)\mathrm{d}u-f^{(r)}(x)\Big\}^2\\
=&\ J_1^2+J_2^2.
\end{aligned}\tag{15}$$

利用

$$\lim_{x\to\tau_F}\inf P\big(Y_1\ge X_1\,|\,X_1\big)=d>0$$

及条件 $(A2)$，由文献 [6] 可得

$$EJ_1^2\le\frac{c\log\log n}{nb_n^{2r+2}}. \tag{16}$$

将 $f(x-ub_n)$ 在 x 处作 Taylor 展开有

$$\begin{aligned}f(x-ub_n)-f(x)\;&=\;\frac{f'(x)}{1!}(-b_nu)+\frac{f''(x)}{2!}(-b_nu)^2+\cdots\\&\quad+\frac{f^{(s-1)}(x)}{(s-1)!}(-b_nu)^{(s-1)}+\frac{f^{(s)}(x^*)}{s!}(-b_nu)^s,\end{aligned}$$

此处 $x^*\in(x-ub_n,x)$。

又由条件 $(A1)$ 及 $f^{(s)}(x)$ 的连续性可得

$$\begin{aligned}I_2^2\;&=\;2\Big\{\frac{1}{b_n^r}\int_0^1K_r(u)\Big[f(x)+\sum_{k=1}^{s-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-ub_n)^k+\frac{f^{(s)}(x^*)}{s!}(-b_nu)^s\Big]\mathrm{d}u-f^{(r)}(x)\Big\}^2\\&=\;2\Big\{\frac{1}{b_n^r}\int_0^1K_r(u)\frac{f^{(r)}(x)}{r!}(-b_nu)^r\mathrm{d}u+\frac{1}{b_n^r}\int_0^1K_r(u)\frac{f^{(s)}(x^*)}{s!}(-b_nu)^s\mathrm{d}u-f^{(r)}(x)\Big\}^2\\&=\;2\Big\{\frac{1}{b_n^r}\int_0^1K_r(u)\frac{f^{(s)}(x^*)}{s!}(-b_nu)^s\mathrm{d}u\Big\}^2=2\Big\{b_n^{s-r}\frac{f^{(s)}(x^*)}{s!}\int_0^1K_r(u)(-u)^s\mathrm{d}u\Big\}^2\\&=\;2b_n^{2(s-r)}\Big[\frac{f^{(s)}(x)}{s!}\Big]^2+o(b_n^{2(s-r)})+o(b_n)^{2(s-r)}f^{(s)}(x).\end{aligned}\tag{17}$$

由 (15) 至 (17) 知，当

$$b_n\to0,\quad\frac{\log\log n}{nb_n^{2r+2}}\to0,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}E\left|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\right|^2=0.$$

(II) **的证明** 由矩不等式可得，对 $0<\lambda\le1$ 有

$$E\left|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\right|^{2\lambda}\le\big(E\,|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|^2\big)^{\lambda}.$$

完全类似 (I) 的证明可知，当 $b_n=n^{-\frac{1}{2s+3}}$ 及 $f(x)\in C_{s,\alpha}$ 时，易得

$$E\left|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\right|^{2\lambda}\le cn^{-\frac{2\lambda(s-r)}{2s+3}}.$$

引理 3.2[7] 令 $R(\delta_G,G)$ 和 $R(\delta_n,G)$ 分别由 (10) 和 (14) 式给出，则

$$0\le R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)\le a\int_\Omega|\beta(x)|p\big(|\beta_n(x)-\beta(x)|\ge|\beta(x)|\big)\mathrm{d}x.$$

4 EB检验函数的渐近性质

定理4.1 设$\delta_n(x)$由(13)式定义，假定条件$(A1)$-$(A2)$成立，且

$$\lim_{x\to\tau_F}\inf P\big(Y_1\geq X_1\,|\,X_1\big)=d>0,$$

其中$\tau_F=\inf\{t:F(t)=1\}$。若

$(A3)$ $\{b_n\}$为正数序列，且满足

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}n^{-1}b_n^{-6}\log\log n=0,$$

$(A4)$ $\int_\Theta\theta^2\mathrm{d}G(\theta)<\infty$，　$(A5)$ $f^{(2)}(x)$为x的连续函数，

则有$\lim\limits_{n\to\infty}R(\delta_n,G)=R(\delta_G,G)$。

证明 记

$$\Psi_n(x)=|\beta(x)|p\left(|\beta_n(x)-\beta(x)|\geq\beta(x)|\right),$$

则有$\Psi_n(x)\leq|\beta(x)|$。

又由(6)式和Fubini定理得

$$\int_\Omega|\beta(x)|\mathrm{d}x\leq|\theta_0^2-\gamma_0^2|+\int_\Theta\theta^2\mathrm{d}G(\theta)+2|\theta_0|\int_\Theta\theta\mathrm{d}G(\theta)<\infty.$$

由引理3.2得

$$0\leq R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)\leq a\int_\Omega|\beta(x)|p\left(|\beta_n(x)-\beta(x)|\geq|\beta(x)|\right)\mathrm{d}x,$$

故由控制收敛定理可知

$$0\leq\lim_{n\to\infty}R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)\leq\int_\Omega\big[\lim_{n\to\infty}\Psi_n(x)\big]\mathrm{d}x,\tag{18}$$

所以要使定理4.1成立，要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\Psi_n(x)=0$对$a.s.$ x成立即可，由Markov和Jensen不等式可得

$$\begin{aligned}\Psi_n(x)\ &\leq\ |U(x)|\left[E|f_n^{(2)}(x)-f^{(2)}(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&\quad+|W(x)|\left[E|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}+|L|\left[E|f_n(x)-f(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

再由引理3.1 (I)和引理3.2可知，对任意固定的$x\in\Omega$，当$r=0,1,2$和$\lambda=1$，有

$$\begin{aligned}0\ &\leq\ \lim_{n\to\infty}\Psi_n(x)\\&\leq\ \left[\lim_{n\to\infty}|U(x)|E\left|f_n^{(2)}(x)-f^{(2)}(x)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&\quad+|V(x)|\left[\lim_{n\to\infty}E\left|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}+|L|\left[\lim_{n\to\infty}E\left|f_n(x)-f(x)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=0,\end{aligned}\tag{19}$$

将(19)式代入(18)式，定理得证。

定理 4.2 设 $\delta_n(x)$ 由 (13) 式定义，假定条件 $(A1)$-$(A2)$ 成立，且

$$\lim_{x\longrightarrow\tau_F}\inf P\big(Y_1\geq X_1\,|\,X_1\big)=d>0,$$

其中 $\tau_F=\inf\{t:F(t)=1\}$，且 $f(x)\in C_{s.\alpha}$，若 $0<\lambda\leq 1$，有

$$(A6)\quad \int_\Omega x^{m\lambda}|\beta(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x<\infty,\quad m=0,1,2,$$

则当 $b_n=n^{-\frac{1}{2s+1}}$ 时，有

$$R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)=O\Big(n^{-\frac{\lambda(s-2)}{2s+3}}\Big),$$

其中 $s\geq 3$ 为正整数。

证明　由引理 3.2 和 Markov 不等式得

$$\begin{aligned}0\leq R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)\ \leq\ & c_1\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}\,|U(x)|^\lambda E\left|f_n^{(2)}(x)-f^{(2)}(x)\right|^\lambda\mathrm{d}x\\ &+c_2\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}\,|W(x)|^\lambda E\left|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)\right|^\lambda\mathrm{d}x\\ &+c_3\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}\,|L|^\lambda E\left|f_n(x)-f(x)\right|^\lambda\mathrm{d}x\\ =\ & D_n+E_n+F_n.\end{aligned}\tag{20}$$

由引理 3.1 和条件 $(A6)$ 知

$$D_n\leq c_1n^{-\frac{\lambda(s-2)}{2s+3}}\int_\Omega x^{2\lambda}\,|\beta(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x\leq c_4n^{-\frac{\lambda(s-2)}{2s+3}},\tag{21}$$

$$E_n\leq c_2n^{-\frac{\lambda(s-1)}{2s+3}}\int_\Omega x^{\lambda}\,|\beta(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x\leq c_5n^{-\frac{\lambda(s-1)}{2s+3}},\tag{22}$$

$$F_n\leq c_3n^{-\frac{\lambda s}{2s+3}}\int_\Omega |\beta(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x\leq c_6n^{-\frac{\lambda s}{2s+3}}.\tag{23}$$

将式 (21)-(23) 代入式 (20)，得

$$R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)=O\Big(n^{-\frac{\lambda(s-2)}{2s+1}}\Big),$$

定理得证。

注　当 $\lambda\to 1$，且 $s\to\infty$ 时，$O(n^{-\frac{\lambda(s-2)}{2s+3}})$ 可任意接近 $O(n^{-\frac{1}{2}})$，即经验 Bayes 检验函数 $\delta_n(x)$ 的最优收敛速度为 $O(n^{-\frac{1}{2}})$。

参考文献：

[1] Robbins H. The empirical Bayes approach to statistical decision problem[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1964, 35: 1-20

[2] Shi Y M. Convergence rate of empirical Bayes estimation for two-dimensional truncation parameters under linear loss[J]. Information Sciences, 2005, 171: 1-11

[3] Huang W T. Testing in two parameter exponential distributions via empirical Bayes method[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2009, 30: 409-426
[4] Liang T C. On empirical Bayes testing for a location parameter in a shifted Gamma distribution[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2003, 32: 123-138
[5] Pareto V. Cour Economic Politique[M]. Lausanne and Pairs: Rouge and Cie, 1987
[6] Wang H J, Zhao Y S. Density estimator for censored data and its uniform consistency rates[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statisties, 1999, 15: 240-244
[7] Johns M V Jr, Van Ryzin J. Convergence rates in empirical Bayes two-action problems 2: continuous case[J]. Ann Math Statist, 1972, 43: 934-947

Asymptotical Property of an Empirical Bayes Test for the Parameter of Pareto Distribution under Right Censored Data

HUANG Juan

(College of Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang 524088)

Abstract: In this paper, we study the two-sided test of Pareto distribution by the empirical Bayes approach. Nonparametric empirical Bayes is more robust since it imposes no restriction on the prior. In order to estimate an unknown marginal density and its derivative, a kernel method is firstly introduced. Then the test rule for the parameter of Pareto distribution is constructed in case of randomly censored from the right. The asymptotically optimal property and convergence rates for the proposed EB test are derived.

Keywords: right censored data; empirical Bayes; asymptotic optimality; convergence rates

Received: 28 Oct 2008. **Accepted:** 28 Sep 2009.
Foundation item: The Natural Science Foundation of Guangdong Ocean Unversity (1012138; 0612163).